ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ MỴ

PHƯƠNG PHÁP CHIẾU GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG TÁCH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ MỴ

PHƯƠNG PHÁP CHIẾU GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG TÁCH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu và danh sách viết tắt

$\mathcal{H}$	không gian Hilbert thực
$2^{\mathcal{H}}$	tập các tập con của $\mathcal{H}$
P_C	phép chiếu mêtric lên tập C
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
VIP	bài toán bất đẳng thức biến phân
SFP	bài toán chấp nhận tách
SFPP	bài toán điểm bất động tách

Mở đầu

Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle ., . \rangle$ và chuẩn $\|.\|$, C là một tập con lồi, đóng khác rỗng của $\mathcal{H}$, F là ánh xạ đi từ một tập trong $\mathcal{H}$ chứa C vào $\mathcal{H}$. Bài toán bất đẳng thức biến phân (Variational Inequality Problem) với ánh xạ giá F và tập ràng buộc C, ký hiệu là VIP(F,C), được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \tag{1}$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1966 khi Philip Hartman và Guido Stampacchia công bố những nghiên cứu đầu tiên của mình về bất đẳng thức biến phân liên quan tới việc giải các bài toán biến phân, bài toán điều khiển tối ưu và các bài toán trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Đến nay, bài toán bất đẳng thức biến phân đã phát triển thành nhiều dạng khác nhau, như bài toán bất đẳng thức biến phân tách, bài toán bất đẳng thức biến phân véc-tơ, bài toán bất đẳng thức biến phân ẩn... Bài toán bất đẳng thức biến phân thu hút được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học vì mô hình của nó chứa nhiều bài toán quan trọng của những lĩnh vực khác nhau trong toán ứng dụng như lý thuyết tối ưu, bài toán bù, bài toán điểm bất động, lý thuyết trò chơi, cân bằng mạng giao thông...

Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của bài toán bất đẳng thức biến phân là xây dựng phương pháp giải. Trong các phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân thì phương pháp chiếu đóng một vai trò quan trọng vì sự đơn giản và thuận lợi trong quá trình tính toán.

Mục tiêu của đề tài luận văn là đọc hiểu và trình bày lại một phương pháp chiếu giải một lớp bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc là tập nghiệm của bài toán điểm bất động tách trong bài báo [3] công bố năm 2017. Bài toán được trình bày cụ thể như sau: Cho C và Q lần lượt là các tập con lồi đóng trong các không gian Hilbert $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$, $F : C \to \mathcal{H}_1$ là ánh xạ đơn điệu mạnh, $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là toán tử tuyến tính bị chặn, $T : C \to C$, $S : Q \to Q$ là các ánh xạ không giãn. Bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc điểm bất động tách VIP(F, Ω) là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \tag{2}$$

trong đó Ω là tập nghiệm của bài toán điểm bất động tách (Split Fixed Point Problem), ký hiệu là SFPP:

$$\text{Tìm } x^* \in \text{Fix}(T) \text{ sao cho } Ax^* \in \text{Fix}(S), \tag{3}$$

ở đây Fix(T), Fix(S) lần lượt là tập điểm bất động của ánh xạ T và ánh xạ S.

Nội dung của đề tài luận văn được viết trong hai chương.

Chương 1: Bài toán điểm bất động tách và bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert

Chương này trình bày các khái niệm về ánh xạ không giãn, phép chiếu mêtric, bài toán điểm bất động tách, bài toán bất đẳng thức biến phân, mối liên hệ giữa bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán điểm bất động trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1, 2, 5, 7, 8, 13].

Chương 2. Phương pháp chiếu giải bất đẳng thức biến phân với ràng buộc điểm bất động tách

Chương này trình bày một phương pháp chiếu giải bài toán bất đẳng thức biến phân với tập ràng buộc là tập nghiệm của bài toán điểm bất động tách trong không gian Hilbert. Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [3] công bố năm 2017.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học khoa học – Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy.

Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, người đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ em trong suốt quá trình nghiên cứu để em có thể hoàn thành luận văn này.

Em cũng bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới quý thầy cô giáo Trường Đại học khoa học – Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy và giúp đỡ em hoàn thành khóa học.

Nhân dịp này em cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, đồng nghiệp trường THPT Ân Thi, gia đình và bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện cho em trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2019

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Mỵ

Chương 1

Bài toán điểm bất động tách và bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert

Chương này trình bày một số kiến thức liên quan đến bài toán điểm bất động, bài toán điểm bất động tách và bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert thực. Mục 1.1 giới thiệu về bài toán điểm bất động, bài toán điểm bất động tách, trình bày một số tính chất của phép chiếu mêtric và tính chất về tập nghiệm của bài toán điểm bất động. Mục 1.2 giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu và trình bày mối liên hệ giữa bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán điểm bất động trong không gian Hilbert thực. Kiến thức của chương được viết trên cơ sở các tài liệu [1, 2, 4].

1.1 Bài toán điểm bất động tách trong không gian Hilbert

Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ và chuẩn $\|.\|$, tương ứng. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong không gian $\mathcal{H}$. Ta ký hiệu $x_n \rightharpoonup x$ nghĩa là dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x và $x_n \to x$ nghĩa là dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x.

1.1.1 Ánh xạ không giãn và phép chiếu mêtric

Định nghĩa 1.1.1 (xem [2])**.** Cho C là một tập con khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$.

(i) Ánh xạ $T : C \to \mathcal{H}$ được gọi là ánh xạ L–liên tục Lipschitz trên C nếu tồn tại hằng số $L \geq 0$ sao cho

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in C. \tag{1.1}$$

(ii) Trong (1.1), nếu $L \in [0, 1)$ thì T được gọi là ánh xạ co; nếu $L = 1$ thì T được gọi là ánh xạ không giãn.

Sau đây ta xét hình chiếu của một phần tử $x \in \mathcal{H}$ lên C.

Định nghĩa 1.1.2 (xem [2])**.** Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$. Phép cho tương ứng mỗi phần tử $x \in \mathcal{H}$ một phần tử $P_C(x) \in C$ xác định bởi

$$\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\| \text{ với mọi } y \in C. \tag{1.2}$$

được gọi là toán tử chiếu (hay phép chiếu mêtric) chiếu $\mathcal{H}$ lên C.

Định lý 1.1.3 (xem [2])**.** *Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$. Với mọi $x \in \mathcal{H}$, tồn tại duy nhất phần tử $P_C(x) \in C$ sao cho* (1.2) *thỏa mãn.*

Chứng minh. Thật vậy, đặt $d = \inf\limits_{u \in C} \|x - u\|$. Khi đó, tồn tại $\{u_n\} \subset C$ sao cho $\|x - u_n\| \longrightarrow d,\ n \longrightarrow \infty$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|^2 &= \big\|(x - u_n) - (x - u_m)\big\|^2 \\
&= 2\big\|x - u_n\big\|^2 + 2\big\|x - u_m\big\|^2 - 4\Big\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\Big\|^2 \\
&\leq 2\Big(\big\|x - u_n\big\|^2 + \big\|x - u_m\big\|^2\Big) - 4d^2 \longrightarrow 0, \quad \text{khi } n, m \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Do đó $\{u_n\}$ là một dãy Cauchy trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$. Suy ra tồn tại $u = \lim\limits_{n \to \infty} u_n \in C$. Do chuẩn là hàm số liên tục nên $\|x - u\| = d$. Giả sử tồn